

# 中国科学院大学硕士研究生入学考试

## 高等数学（丙）考试大纲

### 一、考试性质

中国科学院大学硕士研究生入学高等数学（丙）考试是为招收理学非数学专业硕士研究生而设置的选拔考试。它的主要目的是测试考生的数学素质，包括对高等数学各项内容的掌握程度和应用相关知识解决问题的能力。考试对象为参加全国硕士研究生入学考试、并报考化学、生态学等专业的考生。

### 二、考试的基本要求

要求考生系统地理解高等数学的基本概念和基本理论，掌握高等数学的基本方法。要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。

### 三、考试方法和考试时间

高等数学（丙）考试采用闭卷笔试形式，试卷满分为 150 分，考试时间为 180 分钟。

### 四、考试内容和考试要求

#### （一）函数、极限、连续

##### 考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形

数列极限与函数极限的概念 无穷小和无穷大的概念及其关系 无穷小的性质及无穷小的比较 极限的四则运算 极限存在的单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right).$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

##### 考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式。
2. 理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。掌握判断函数这些性质的方法。
3. 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。会求给定函数的复合函数和反函数。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 理解极限的概念（包括数列极限和函数极限），理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则，会运用它们进行一些基本的判断和计算。
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限。掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限。

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。
10. 掌握连续函数的运算性质和初等函数的连续性，熟悉闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理等），并会应用这些性质。

## （二）一元函数微分学

### 考试内容

导数的概念 导数的几何意义和物理意义 函数的可导性与连续性之间的关系 平面曲线的切线和法线 基本初等函数的导数 导数的四则运算 复合函数、反函数、隐函数的导数的求法 参数方程所确定的函数的求导方法 高阶导数的概念 高阶导数的求法 微分的概念和微分的几何意义 函数可微与可导的关系 微分的运算法则及函数微分的求法 一阶微分形式的不变性 微分在近似计算中的应用 微分中值定理 洛必达（L' Hospital）法则 泰勒(Taylor)公式 函数的极值 函数最大值和最小值 函数单调性 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 函数图形的描绘

### 考试要求

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，掌握函数的可导性与连续性之间的关系。
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本的求导方法。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。
3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的  $n$  阶导数。
4. 会求分段函数的一阶、二阶导数。
5. 会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数
6. 会求反函数的导数。
7. 理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理，了解柯西中值定理和泰勒定理，掌握这四个定理的简单应用。
8. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其简单应用。
9. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直渐近线，会描绘函数的图形。
10. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法。

## （三）一元函数积分学

### 考试内容

原函数和不定积分的概念 不定积分的基本性质 基本积分公式 定积分的概念和基本性质 定积分中值定理 变上限定积分定义的函数及其导数 牛顿—莱布尼茨（Newton—Leibniz）公式 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分 广义积分（无穷限积分、瑕积分） 定积分的应用

### 考试要求

1. 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念。
2. 熟练掌握不定积分的基本公式，熟练掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理。掌握牛顿—莱布尼茨公式。熟练掌握不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法。
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分。
4. 理解变上限定积分定义的函数，会求它的导数。

5. 理解广义积分（无穷限积分、瑕积分）的概念，掌握无穷限积分、瑕积分的收敛性判别法，会计算一些简单的广义积分。

6. 会利用定积分计算平面图形的面积，旋转体的体积和函数的平均值。

#### （四）多元函数微积分学

##### 考试内容

多元函数的概念 二元函数的几何意义 二元函数的极限和连续 有界闭区域上多元连续函数的性质 多元函数偏导数和全微分的概念及求法 多元复合函数、隐函数的求导法 二阶偏导数的求法 多元函数的极值和条件极值 拉格朗日乘数法 多元函数的最大值、最小值及其简单应用 全微分在近似计算中的应用 二重积分的概念及性质 二重积分的计算和应用

##### 考试要求

1. 理解多元函数的概念、理解二元函数的几何意义。  
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念及基本运算性质，了解有界闭区域上二元连续函数的性质。

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求偏导数和全微分，掌握多元复合函数偏导数的求法，掌握隐函数的偏导数求法。

3. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值、最小值，并会解决一些简单的应用问题。

4. 了解全微分在近似计算中的应用。

5. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标，极坐标）。

#### （五）无穷级数

##### 考试内容

常数项级数及其收敛与发散的概念 收敛级数的和的概念 级数的基本性质与收敛的必要条件 几何级数与  $p$  级数及其收敛性 正项级数收敛性的判别法 交错级数与莱布尼茨定理 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 函数项级数的收敛域、和函数的概念 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域 幂级数在其收敛区间内的基本性质 简单幂级数的和函数的求法 泰勒级数 初等函数的幂级数展开式 函数的幂级数展开式在近似计算中的应用

##### 考试要求

1. 理解常数项级数的收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件

2. 掌握几何级数与  $p$  级数的收敛与发散情况。

3. 掌握正项级数收敛性的各种判别法。

4. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系，掌握交错级数的莱布尼茨判别法。

5. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念。

6. 理解幂级数的收敛域、收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径及收敛域的求法。

7. 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质（和函数的连续性、逐项微分和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和。

8. 掌握一些常见函数如  $e^x$ 、 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\ln(1+x)$  和  $(1+x)^\alpha$  等的麦克劳林展开式，会用

它们将一些简单函数间接展开成幂级数。

9. 会利用函数的幂级数展开式进行近似计算。

## (六) 常微分方程

### 考试内容

常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程 伯努利 (Bernoulli) 方程 全微分方程 可用简单的变量代换求解的某些微分方程 可降价的高阶微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程 二阶常系数非齐次线性微分方程 微分方程的简单应用

### 考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念。
2. 掌握变量可分离的微分方程的解法, 掌握解一阶线性微分方程的常数变易法。
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程, 会用简单的变量代换求解某些微分方程。
4. 会用降阶法解下列方程:  $y^{(n)}=f(x)$ ,  $y''=f(x, y')$  和  $y''=f(y, y')$
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理。了解解二阶非齐次线性微分方程的常数变易法。
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法。
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数、以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程。
8. 会用微分方程解决一些简单的应用问题。

## (七) 行列式

### 考试内容

行列式的概念和基本性质 行列式按行 (列) 展开定理

### 考试要求

1. 了解行列式的概念, 掌握行列式的性质。
2. 会应用行列式的性质和行列式按行 (列) 展开定理计算行列式。

## (八) 矩阵

### 考试内容

矩阵的概念 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

### 考试要求

1. 理解矩阵的概念, 了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵的定义及性质, 了解对称矩阵、反对称矩阵及正交矩阵等的定义和性质。
2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律, 了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质。
3. 理解逆矩阵的概念, 掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件, 理解伴随矩阵的概念, 会用伴随矩阵求逆矩阵。
4. 了解矩阵的初等变换和初等矩阵及矩阵等价的概念, 理解矩阵的秩的概念, 掌握用初等变换求矩阵的逆矩阵和秩的方法。

5. 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算法则.

## (九) 向量

### 考试内容

向量的概念 向量的线性组合与线性表示 向量组的线性相关与线性无关 向量组的极大线性无关组 等价向量组 向量组的秩 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系 向量的内积

### 考试要求

1. 了解向量的概念，掌握向量的加法和数乘运算法则.
2. 理解向量的线性组合与线性表示、向量组线性相关、线性无关等概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 了解向量组的极大线性无关组的概念和向量组秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系.
5. 了解内积的概念，掌握向量内积的运算.

## (十) 线性方程组

### 考试内容

线性方程组的克莱姆（Cramer）法则 线性方程组有解和无解的判定 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组（导出组）的解之间的关系 非齐次线性方程组的通解

### 考试要求

1. 会用克莱姆法则解线性方程组.
2. 掌握非齐次线性方程组有解和无解的判定方法.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
4. 了解非齐次线性方程组有解的条件，理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

## (十一) 矩阵的特征值和特征向量

### 考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质 相似矩阵的概念及性质 矩阵可对角化的充分必要条件 实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵

### 考试要求

1. 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值和特征向量的方法.
2. 理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.
3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

## 五、主要参考文献

- [1] 《高等数学》第六版（上、下册），同济大学数学系主编，高等教育出版社，2007年。
- [2] 《线性代数》第五版，同济大学数学系主编，高等教育出版社，2007年。

编制单位：中国科学院大学

编制日期：2024年6月26日

中国科学院大学